Funciones homogéneas y homotéticas

Aplicaciones matemáticas para economía y negocios (EAF2010)

Felipe Del Canto

Pontificia Universidad Católica de Chile

Primer semestre de 2021

Funciones homogéneas

Motivación: El estudiante soñador

- Un estudiante tiene que escribir un ensayo.
- Cree que la cantidad de palabras escritas, P, se calcula

$$P(t,e) = 5\sqrt{te}$$

  - Donde t son las horas trabajadas y e es el esfuerzo.
- El piensa “si trabajo el doble y pongo el doble de esfuerzo, produzco el doble”.
  - Claro, $P(2t,2e) = 5\sqrt{4te} = 2(5\sqrt{te}) = 2P(t,e)$.

Motivación: El estudiante soñador

- Nuestro estudiante es un poco soñador.
- Pero la propiedad de la función que utiliza es muy útil.
  - Se conoce como **homogeneidad de grado 1**.
- En este capítulo describiremos los distintos tipos de homogeneidad.

Definición (Cono)

Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice **cono** si para todo $\mathbf{x} \in D$ y para todo $t > 0$, $t\mathbf{x} \in D$

- Esta definición es importante para esta parte.
- Porque pensaremos que las funciones están definidas en dominios cónicos.

Definición (Función homogénea)

Una función $f(x_1, x_2)$ con dominio (cónico) D es homogénea de grado k si para todo $(x_1, x_2) \in D$ y para todo $t > 0$,

$$f(tx_1, tx_2) = t^k f(x_1, x_2)$$

- Estas funciones son útiles para estudiar ciertos modelos económicos.
- Se relaciona con el concepto de "economías de escala".

Ejemplo (Función homogénea)

Consideremos la función de producción Cobb-Douglas $F(L,K) = AL^aK^b$, con $A,a,b > 0$. ¿Es esta función homogénea?

Ejemplo (Función homogénea)

Se pueden dar 3 casos:

1. Si $a+b<1$, entonces multiplicar por t los insumos multiplica por menos que t el producto. Hay retornos **decrecientes** a escala.
2. Si $a+b=1$, entonces multiplicar por t los insumos multiplica (exactamente) por t el producto. Hay retornos **constantes** a escala.
3. Si $a+b>1$, entonces multipicar por t los insumos multiplica por más que t el producto. Hay retornos **crecientes** a escala.

Ejercicio: Determine si las siguientes funciones son homogéneas.

1. $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
2. $f(x,y) = \frac{x^2+xy}{y^2}$.
3. $f(x,y) = x^3 + xy$.

Funciones homogéneas

- El ejemplo anterior nos muestra por qué este tipo de funciones son útiles.

- Se usan para modelar situaciones con un cierto tipo de retornos a escala.
  - Crecientes, decrecientes o constantes.

- Vamos a definir estos conceptos para el caso general.

Definición (Retornos a escala)

Sea F una función de producción homogénea de grado k. Decimos que:

1. F tiene retornos decrecientes a escala si $k < 1$.
2. F tiene retornos constantes a escala si $k = 1$.
3. F tiene retornos crecientes a escala si $k > 1$.

Ejercicio (Retornos a escala)

Suponga que F y G son dos funciones de producción que tienen retornos decrecientes a escala. ¿Qué tipo de retornos tiene la función $H_1 = F \cdot G$? ¿Y $H_2 = F + G$ (si F y G son homogéneas del mismo grado)? Interprete y de una intuición para cada resultado.

Interpretación geométrica

- Supongamos que f es una función homogénea de grado k.

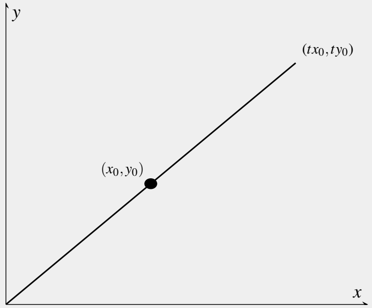
- Digamos que ciertos puntos (x,y) pertenecen a la curva de nivel de f a altura c.

- Luego, los puntos (tx,ty), con $t > 0$ pertenecen a la curva de nivel a altura $t^k c$.
  - Efectivamente, $f(tx,ty) = t^k f(x,y) = t^k c$.

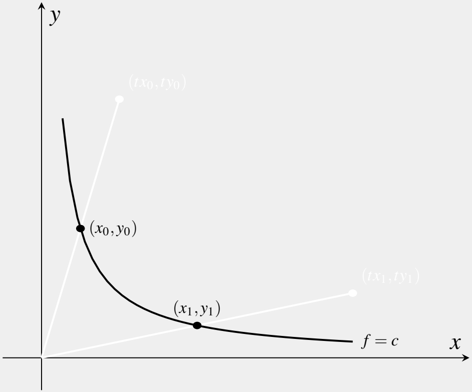
- Esto tiene consecuencias geométricas interesantes.

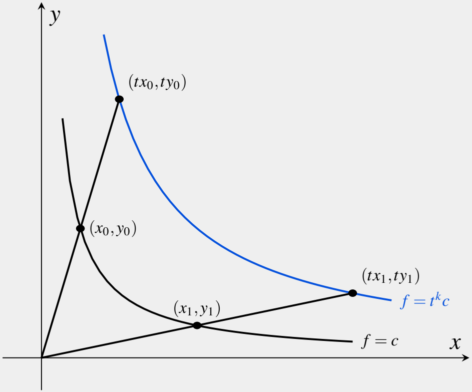
Interpretación geométrica

- En un plano, los puntos (tx, ty), con $t > 0$ y x, y fijos forman una recta.
  - Esa recta pasa por el origen y se denomina **rayo**.



- Así, si conocemos una de las curvas de nivel, en verdad conocemos todas.





Interpretación geométrica

- En resumen, la forma de una función homogénea está determinada por:
  - Una de sus curvas de nivel (la altura c y los puntos en ella).
  - El grado de homogeneidad de la función (el valor de k).

- La definición y la interpretación geométrica también valen en n variables.

- Cerramos esta parte dando esa definición.

Definición (Función homogénea)

Una función $f(\mathbf{x})$ de n variables con dominio (cónico) D es homogénea de grado k si para todo $\mathbf{x} \in D$ y para todo $t > 0$,

$$f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x})$$

donde $t\mathbf{x} = (tx_1, \ldots, tx_n)$.

Propiedades de las funciones homogéneas y Teorema de Euler

Teorema (Derivadas parciales de funciones homogéneas)

Sea $f(x_1,\ldots,x_n)$ una función homogénea de grado k con dominio (cónico) abierto D. Supongamos que la derivada parcial con respecto a una variable x_i existe. Entonces, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es homogénea de grado $k-1$.

Demostración (Derivadas parciales de funciones homogéneas)

Como f es homogénea de grado k, entonces

$$f(tx_1,\ldots,tx_n) = t^k f(x_1,\ldots,x_n)$$

Esto dice que la función del lado izquierdo es igual a la del lado derecho en todos los puntos $(x_1,\ldots,x_n)$ y $t>0$, luego sus derivadas parciales con respecto a x_i también son iguales:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(tx_1,\ldots,tx_n) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(t^k f(x_1,\ldots,x_n)\right)$$

Demostración (Derivadas parciales de funciones homogéneas)

La derivada del lado izquierdo se obtiene usando regla de la cadena (porque $x_i(t, x_i) = tx_i$)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(tx_1, \ldots, tx_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, x_n) \cdot \frac{\partial t x_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, x_n) \cdot t$$

El lado derecho es solamente

$$t^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$$

Luego, dividiendo por t a ambos lados obtentemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, x_n) = t^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$$

Lo que por definición dice que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es homogénea de grado $k - 1$.

Ejercicio (Derivadas parciales de funciones homogéneas)

Demuestre, usando el teorema anterior, que la función $f(x,y) = x^3y + \frac{1}{2}xy^2$ no es homogénea de ningún grado. (*Ayuda: Puede ayudarse en un ejercicio anterior.*)

Tasa Marginal de Sustitución (TMS)

- Lo anterior dice que si f es homogénea, sus derivadas son homogéneas.
- Esto tiene una implicancia directa en la TMS.
  - ¿La razón? Porque la TMS es la división de dos derivadas de la función.
- ¿Qué es lo que debería ocurrir?

Corolario (Homogeneidad de la TMS)

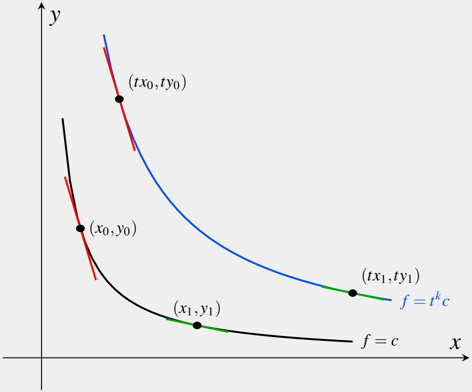
Supongamos que f es como en el teorema anterior y que las derivadas parciales con respecto a x_i y x_j existen. Entonces TMS_{x_i,x_j} es homogénea de grado 0, es decir,

$$TMS_{x_i,x_j}(tx_1,\ldots,tx_n) = TMS_{x_i,x_j}(x_1,\ldots,x_n)$$

- Esto tiene consecuencias geométricas interesantes.
- Relacionadas con el dibujo que vimos anteriormente.

Tasa Marginal de Sustitución (TMS)

- Según el teorema anterior, hay rectas tangentes con pendientes iguales.



Tasa Marginal de Sustitución (TMS)

Ejercicio: Demuestre el corolario anterior.

Teorema de Euler

Teorema (Teorema de Euler)

Supongamos que $f(\mathbf{x})$ es una función de n variables con dominio (cónico) abierto D y derivadas parciales continuas. Entonces, f es homogénea de grado k si y solo si para cualquier punto $\mathbf{x} \in D$,

$$x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \cdots + x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}),$$

o, escrito en términos del gradiente,

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}).$$

- Notar que el teorema dice “si y solo si”, lo que significa dos cosas:
  - Una función homogénea de grado k verifica $\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$ en todo punto $\mathbf{x}$.
  - Una función tal que $\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$ en todo punto $\mathbf{x}$, es homogénea de grado k.

“Demostración” (Teorema de Euler)

Sabemos que como f es homogénea de grado k, entonces para todo $t > 0$.

$$f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x})$$

Si vemos ambos lados como funciones de t, entonces la igualdad anterior implica que las derivadas con respecto a t serán iguales

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(t\mathbf{x}) \cdot \frac{d(tx_1)}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(t\mathbf{x}) \cdot \frac{d(tx_n)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(t^k f(\mathbf{x}))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(t\mathbf{x}) \cdot x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(t\mathbf{x}) \cdot x_n = kt^{k-1} f(\mathbf{x})$$

Usando que las derivadas parciales son homogéneas de grado $k-1$ se llega al resultado.

"Demostración" (Teorema de Euler)

Esta es la mitad de la demostración. Falta ver que si

$$x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \cdots + x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}),$$

entonces f es homogénea de grado k. Sin entrar en detalles, eso se hace "devolviéndose" en los pasos anteriores, integrando con respecto a t.

Ejercicio

Demuestre que si f es homogénea de grado 0, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_{f,x_i} = 0$$

Interprete.

Funciones homotéticas

Motivación: El problema del consumidor

- Pensemos un consumidor que obtiene utilidad de bienes x e y.
- Su función de utilidad es $u(x,y) = xy$.
  - La cual es homogénea de grado 2.
- Otro consumidor tiene función de utilidad $\tilde{u}(x,y) = xy + 100$.
  - La cual NO es homogénea de ningún grado.
- ¿Son demasiado distintas?

Motivación: El problema del consumidor

- Si a ambos consumidores les ofrecemos el mismo dinero.
  - ¿Toman decisiones diferentes?

- Lo importante en estos problemas son las curvas de indiferencia.
  - Las curvas de nivel de u.
  - Recuerden el ejercicio geométrico que hicimos con curvas de nivel.

- En particular, importa la TMS.
  - Pasará que ambas tienen la misma TMS en cada punto y eso no es casualidad.

Motivación: El problema del consumidor

- En el ejemplo, las curvas de nivel de u y $\tilde{u}$ tienen las mismas propiedades.

- La razón es que para transformar u a $\tilde{u}$ la geometría de la función queda igual.

- Generalizar esa relación es lo que motiva la siguiente definición.

Definición (Función homotética)

Una función f de n variables con dominio (cónico) D se dice **homotética** si es una transformación creciente de alguna función homogénea.

Es decir, f es homotética si existen una función univaridada H y una función homogénea g (de algún grado k) con dominio D tales que para todo $x \in D$

$$f(\mathbf{x}) = H(g(\mathbf{x}))$$

- **¡Cuidado!** La definición es distinta a la del libro.

Ejemplo (Función homotética)

La función $f(x,y) = a\ln x + b\ln y$, ¿es homogénea? ¿es homotética?

Ejercicio (Función homotética)

La función $f(x,y) = (x^3y^3) + xy$, ¿es homogénea? ¿es homotética?

Funciones homotéticas

Teorema (Función homotética y composición de la curva de nivel)

Sea f con dominio (cónico) D. Entonces, f es homotética si y solo si para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ y $t > 0$,

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \Longrightarrow f(t\mathbf{x}) = f(t\mathbf{y})$$

- En el contexto de funciones de utilidad, esto se lee así:

  "Si dos puntos comparten una misma curva de indiferencia, entonces todos los múltiplos de esos puntos también comparten una misma curva de indiferencia"

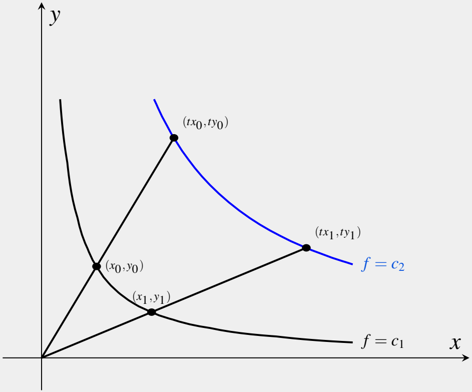
- **¡Ojo!** No digo que sea la misma curva de indiferencia.

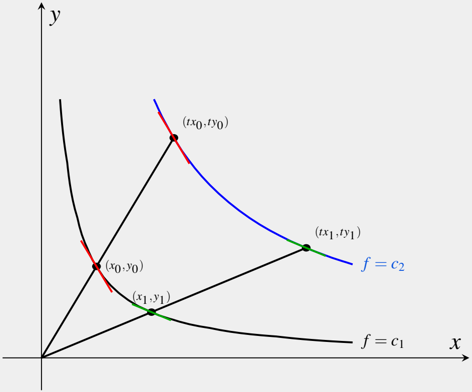
Ejercicio: Demuestre el teorema anterior.

Interpretación geométrica

- Aquí la intuición geométrica es ligeramente distinta.
- Supongamos que los puntos $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ están en la curva de nivel de f a altura c.
  - Entonces $t\mathbf{x}_0$ y $t\mathbf{x}_1$ están ambos en otra curva de nivel.
  - Pero esa curva no está a altura $t^k c$ como antes.
- Luego, solo tenemos una idea de la forma de las curvas de nivel de f.
  - Es decir, qué puntos pertenecen a ella y su pendiente.
  - Con una función homogénea sabíamos además la forma de la función completa.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA





Este dibujo da la intuición del siguiente teorema

Funciones homotéticas y TMS

Teorema (Función homotética y TMS)

Sea f una función con dominio (cónico) abierto D. Supongamos que las derivadas parciales de f existen y son continuas. Entonces f es homotética si y solo si TMS_{x_i,x_j} es homogénea de grado 0 para cualquier i y j, es decir, si para todo i, j, para todo $t > 0$ y para todo $\mathbf{x} \in D$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(t\mathbf{x})}{\frac{\partial f}{\partial x_i}(t\mathbf{x})} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})}{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})}$$

- Se puede leer también como:

"f es homotética si y solo si las pendientes de las curvas de nivel son constantes a lo largo de rayos que parten del origen"

Idea de la demostración (Función homotética y TMS)

La primera parte, que toda función homotética cumple que TMS_{x_i,x_j} es homogénea de grado 0 se obtiene de derivar y usar la regla de la cadena (pueden hacerlo como ejercicio para soltar la mano).

La segunda parte, que una función que cumple la homogeneidad de grado 0 para TMS_{x_i,x_j} tiene que ver con el teorema anterior (diapositiva 33). Dado que la TMS es constante a lo largo de un rayo, entonces al "dibujar" (o reconstruir) la curva de nivel en el punto $t\mathbf{x}_0$ obtendremos los puntos $t\mathbf{x}$ que son múltiplos de los puntos de la curva de nivel de $\mathbf{x}_0$.

Teorema (Función homotética)

Sea f una función con dominio (cónico) abierto D. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es homotética.
2. f es una transformación creciente de una función homogénea.
3. $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \Rightarrow f(t\mathbf{x}) = f(t\mathbf{y})$, para cualquier $t > 0$.
4. TMS_{x_i,x_j} es homogénea de grado 0 para todo i, j.

- Esto dice que 2, 3 y 4 pueden ser definiciones para una función homotética.

Ejercicio: Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

- Toda función homogénea es homotética.
- Toda función homotética es homogénea.
- Si una función tiene TMS constante a lo largo de rayos que parten del origen, entonces es homogénea.
- Si una función verifica el Teorema de Euler es homotética.